

Указания, решения, ответы

УРАВНЕНИЯ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

1. Уравнение с одной неизвестной

1.1. Решение. Подставим в уравнение $x = 1 + \sqrt{3}$. Получим равенство $(4a + b + 42) + (2a + b + 18)\sqrt{3} = 0$.

Равенство $A + B\sqrt{3} = 0$, где A и B – целые, выполняется, если $B = 0$.

Действительно, если $B \neq 0$, то $\sqrt{3} = -\frac{A}{B}$,

т.е. иррациональное число $\sqrt{3}$ оказалось равно рациональному, что невозможно. Таким образом, $B = 0$, а следовательно, и $A = 0$. Решая систему

$$\begin{cases} 4a + b + 42 = 0 \\ 2a + b + 18 = 0, \end{cases}$$

находим $a = -12$, $b = 6$.

Ответ: $a = -12$, $b = 6$.

1.2. Найдите рациональные p и q при условии, что один из корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$.

Ответ: $p = q = -2$.

1.3. Может ли квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами иметь дискриминант, равный 23?

Первое решение. Рассмотрим уравнение $b^2 - 4ac = 23$. Так как 23 – нечетное число, а $4ac$ – четное, то b^2 и, следовательно, b – нечетное число, т.е. $b = 2k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$(2k - 1)^2 - 4ac = 23; \quad 4(k^2 - k - ac) = 22.$$

Последнее уравнение не имеет решений, так как 22 не делится на 4.

Второе решение. Перепишем уравнение $b^2 - 4ac = 23$ в виде $b^2 - 25 = 4ac - 2$ и разложим обе части уравнения на множители: $(b - 5)(b + 5) = 2(2ac - 1)$. (*)

Так как в правой части уравнения – число четное, то и в левой – тоже четное, следовательно, $b - 5$ и $b + 5$ одновременно четные (докажите), т.е. $b - 5 = 2m$, $b + 5 = 2k$. Левая часть уравнения (*) делится на 4, а правая –

нет, поэтому уравнение $b^2 - 4ac = 23$ не имеет решений в целых числах.

Третье решение. Перепишем уравнение $b^2 - 4ac = 23$ в виде $b^2 = 4ac + 23$ или $b^2 = 4(ac + 5) + 3$. Получили, что квадрат натурального числа при делении на 4 дает остаток 3, что невозможно (докажите).

Ответ: не может.

1.4. (2010). Каждый из двух различных корней квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + (3a + 10)x + 5b - 14$ и его значение при $x = 1$ являются простыми числами. Найдите a , b и корни трехчлена $f(x)$.

Решение. Обозначим $3a + 10 = p$, $5b - 14 = q$. Тогда значение трехчлена при $x = 1$ есть $f(1) = 1 + p + q$. Пусть x_1 и x_2 – корни трехчлена, $x_1 < x_2$. Воспользовавшись формулами Виета $x_1 \cdot x_2 = q$, $x_1 + x_2 = -p$, запишем выражение $f(1)$ в виде $f(1) = 1 - (x_1 + x_2) + x_1x_2$ и преобразуем его, разложив правую часть на множители:

$$f(1) = 1 - x_1 + x_2(x_1 - 1) = (x_1 - 1)(x_2 - 1).$$

Так как $f(1)$, x_1 и x_2 по условию являются простыми числами, то числа $x_1 - 1$ и $x_2 - 1$ – натуральные и меньшее из них должно быть равно 1. Следовательно, $x_1 - 1 = 1$, откуда $x_1 = 2$. Тогда $f(1) = x_2 - 1$, т.е. $x_2 - 1$ и x_2 – два последовательных простых числа, что возможно только если этими числами являются 2 и 3. Итак, $x_2 = 3$, поэтому $p = 3a + 10 = -5$, $q = 5b - 14 = 6$. Из двух последних равенств находим $a = -5$, $b = 4$.

Ответ: $a = -5$, $b = 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

1.5. (2010). Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет два различных целых корня. Один из корней трехчлена и его значение в точке $x = 11$ являются простыми числами. Найдите корни трехчлена.

Ответ: 12; 13.

1.6. (2010). Найдите все такие целые a и b , что корни уравнения $x^2 + (2a+9)x + 3b+5 = 0$

являются различными целыми числами, а коэффициенты $2a+9$ и $3b+5$ - простыми числами.

Решение. Обозначим корни квадратного уравнения через m и n . По теореме Виета $mn = 3b+5$ - простое число, тогда $m = \pm 1$, $n = \pm(3b+5)$. Тогда $2a+9 = \mp(3b+6) = \mp 3(b+2)$. Поэтому простое число $2a+9 = 3$, откуда $a = -3$. Тогда $b+2 = 1$, т.е. $b = -1$.

Ответ: $a = -3; b = -1$.

2. Уравнения первой степени с двумя неизвестными

2.1. Решите уравнение $3x - 4y = 1$ в целых числах.

Ответ: $x = 4n + 3, y = 3n + 2, n \in \mathbb{Z}$.

2.2. (2010). Найдите все целые решения уравнения $113x + 179y = 17$, удовлетворяющие неравенствам $x > 0, y + 100 > 0$.

Решение. Воспользуемся методом, сходным с алгоритмом Евклида. Имеем $179 = 113 + 66$. Перепишем уравнение в виде $113(x+y) + 66y = 17$. Обозначим $x+y = u$,

$113u + 66y = 17$. Можно вновь 113 разделить на 66 с остатком, а лучше так: $113 = 2 \cdot 66 - 19$. Получаем

$66(2u+y) - 19u = 17$. Обозначим

$2u+y = v, 66v - 19u = 17$,

$66 = 3 \cdot 19 + 9$. Получаем уравнение $19(3v-u) + 9v = 17, 3v-u = w;$

$19w + 9v = 17, 9(2w+v) + w = 17,$

$2w+v = t$.

Наконец, получаем уравнение $9t + w = 17$. Это уравнение имеет решение: $w = 17 - 9t$, где t - любое целое число. Пропускаем обратные действия:

$v = t - 2w = t - 34 + 18t = 19t - 34,$

$u = 3v - w = 66t - 119,$

$y = v - 2u = -113t + 204,$

$x = u - y = 179t - 323$. Таким образом,

$x = 179t - 323, y = -113t + 204$, где t -

любое целое число. Из условия $x > 0, y > -100$, т.е. из системы

$$\begin{cases} 179t - 323 > 0 \\ -113t + 204 > -100 \end{cases} \quad \text{найдем} \quad t = 2,$$

затем $x = 35; y = -22$.

Ответ: $x = 35; y = -22$.

3. Уравнения второй степени с двумя неизвестными

3.1. (МГУ, 2007). Найдите все целочисленные решения уравнения

$$x^2 - 14x + 4y^2 + 32y + 88 = 0.$$

Указание. Уравнение приводится к виду $(x-7)^2 + 4(y+4)^2 = 25$.

Ответ: $(12; -4); (2; -4); (10; -2); (4; -2); (10; -6); (4; -6)$.

3.2. Решите уравнение $xy - y^2 = x$ в целых числах.

Ответ: $(0; 0); (4; 2)$.

3.3. (МФТИ, 2004). Найдите все пары целых чисел x и y , удовлетворяющие уравнению $-3xy - 10x + 13y + 35 = 0$.

Ответ: $(6; -5); (4; 5); (-4; -3)$.

3.4. Решите в целых числах уравнение $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$.

Ответ: $(1; -1)$.

3.5. Решите в целых числах уравнение $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$.

Ответ: $(10; 0); (-10; 0); (1; 3); (17; 3); (18; 4); (6; 4); (-1; -3); (-17; -3); (-6; -4); (15; 5); (-15; -5)$.

3.6. Уравнение $2xy = x^2 + 2y$ решите в натуральных числах.

Ответ: $x = y = 2$.

3.7. Найдите все пары целых чисел, сумма которых равна их произведению.

Первое решение. Пусть целые числа x и y таковы, что $x+y = xy$, тогда отсюда

$$\text{получим } y = \frac{x}{x-1}.$$

Поскольку x и $x-1$ два последовательных целых числа, то число y может быть целым только тогда, когда $x-1 = \pm 1$, т.е. $x = 0$ или $x = 2$. Тогда

получаем $y = 0$ или $y = 2$ соответственно.

Второе решение. Приведем уравнение $x + y = xy$ к виду $x(y-1) - y + 1 = 1$ или $(x-1)(y-1) = 1$. Отсюда получаем две системы.

$$1) \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Ответ: $x = 0, y = 0; x = 2, y = 2$.

3.8. Решите уравнение $xy + x - y = 2$ в целых числах.

Указание. $(x-1)(y+1) = 1$.

Ответ: $x = 2, y = 0$;

3.9. (ММО, 1941, 9-10 классы).

Решите в целых числах уравнение

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

Указание. Преобразуйте уравнение к виду $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = 2$.

Ответ: $(0;0);(1;0);(0;1);(2;1);(1;2);(2;2)$.

3.10. Решите в натуральных числах систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = 14, \\ x + yz = 19. \end{cases}$$

Решение. Вычитая из второго уравнения системы первое, получим:

$yz - y - z = 5$, или $yz - y - z + 1 = 6$, $(y-1)(z-1) = 6$. Будем искать лишь решения, удовлетворяющие условию $y < z$ (остальные решения получаются перестановкой значений y и z). При таком соглашении последнее уравнение сводится к одной из следующих двух систем:

$$\begin{cases} y-1=1 \\ z-1=6 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y-1=2 \\ z-1=3. \end{cases}$$

Из первой системы $y = 2, z = 7$, а из второй $y = 3, z = 4$. Подставляя эти значения y и z в одно из уравнений заданной системы, получим соответствующие им значения $x = 5$ или $x = 7$.

Ответ: $(5;2;7);(5;7;2);(7;3;4);(7;4;3)$.

3.11. (Московская математическая регата, 2005/2006, 11 класс). Найдите все целые решения уравнения:

$$x^2 - 2xy + 2x - y + 1 = 0.$$

Первое решение. Преобразуем данное уравнение, выразив переменную y через переменную x : $y(2x+1) = x^2 + 2x + 1$;

$y = \frac{x^2}{2x+1} + 1$, так как $2x+1 \neq 0$ при любых целых значениях x . Для того, чтобы y было целым, необходимо и достаточно, чтобы дробь $\frac{x^2}{2x+1}$

принимала целые значения.

Заметим, что $\text{НОД}(2x+1; x) = \text{НОД}(x+1; x) = 1$, поэтому числа x^2 и $2x+1$ взаимно простые. Следовательно,

выражение $\frac{x^2}{2x+1}$ принимает целые

значения, если $2x+1 = \pm 1$. Таким образом, решения данного уравнения: $x = 0; y = 1$ и $x = -1; y = 0$.

Второе решение. Запишем данное уравнение как квадратное относительно переменной x : $x^2 - 2(y-1)x - (y-1) = 0$.

Его решения: $x = (y-1) \pm \sqrt{D'}$, где $D' = (y-1)^2 + (y-1) = (y-1)y$.

Для того, чтобы x было целым, необходимо и достаточно, чтобы D' являлось квадратом целого числа. Это возможно только, если $D' = 0 \Leftrightarrow y = 1$ или $y = 0$, так как в остальных случаях число $(y-1)y$ находится в интервале между двумя соседними квадратами: $(y-1)^2$ и y^2 . Если $y = 1$, то $x = 0$; если $y = 0$, то $x = -1$.

Третье решение. Преобразуем данное уравнение, выделив квадрат трехчлена: $(x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y) - y^2 + y = 0$

$\Leftrightarrow (x - y + 1)^2 = (y-1)y$. По доказанному выше $(y-1)y$ является квадратом целого числа тогда, и только тогда, когда $y = 0$ или $y = 1$. Если $y = 1$, то $x = 0$; если $y = 0$, то $x = -1$.

Ответ: $x = 0; y = 1$ или $x = -1; y = 0$.

3.12. (2010) Решите в целых числах уравнение $2x^2 - 2xy + 9x + y = 2$.

Решение. Преобразуем уравнение: $y(2x-1) = 2x^2 + 9x - 2$. Так как x – целое, то $2x-1 \neq 0$, поэтому выразим y через x :

$$y = \frac{2x^2 + 9x - 2}{2x-1} = x + 5 + \frac{3}{2x-1}.$$

Поскольку x и y – целые числа, то число $\frac{3}{2x-1}$ – тоже целое. Значит,

$2x-1$ делитель 3, т.е.

- 1) $2x-1=1$, $x=1$;
- 2) $2x-1=-1$, $x=0$;
- 3) $2x-1=3$, $x=2$;
- 4) $2x-1=-3$, $x=-1$.

Ответ: (1;9), (2;8), (0;2), (-1;3).

3.13. (2010). Найдите все целые решения уравнения $3x^2 + 4xy - 7y^2 = 13$.

Решение. Разложим левую часть на множители:

$$3x^2 + 4xy - 7y^2 = (x-y)(3x+7y).$$

Имеем $(x-y)(3x+7y) = 13$. Поскольку 13 можно представить в виде произведения двух целых чисел с учетом порядка четырьмя способами, то получаем четыре системы:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} x-y=1 \\ 3x+7y=13 \end{cases} & 2) \begin{cases} x-y=13 \\ 3x+7y=1 \end{cases} & 3) \begin{cases} x-y=-1 \\ 3x+7y=-13 \end{cases} \\ & & 4) \begin{cases} x-y=-13 \\ 3x+7y=-1 \end{cases} \end{array}$$

Целочисленные решения имеют лишь 1-я и 3-я системы.

Ответ: $x=2$; $y=1$ или $x=-2$; $y=-1$.

3.14. (ММО, 1964, 7 класс). При каких натуральных числах a существуют такие натуральные числа x и y , что $x^2 + y^2 = axy$?

Указание. Положим $t = \frac{y}{x}$, тогда t – рациональное число, являющееся корнем уравнения $t^2 - at + 1 = 0$. Но тогда

$$t = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Число $\sqrt{a^2 - 4}$ при

целом a может быть рациональным только при $a = \pm 2$.

Ответ: $a = 2$.

3.15. (ММО, 1983, 7 класс). Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

Указание. Представим уравнение в виде $x^2 = (y+1)^2 + 12$ или $x^2 - (y+1)^2 = 12$, $(x-y-1)(x+y+1) = 12$. Заметив, что каждая скобка – четное число, получаем 4 возможности, отсюда следует ответ.

Ответ: (4;1); (4;-3); (-4;1); (-4;-3).

3.16. Решите в целых положительных числах уравнение

$$2x^2 - xy - y^2 + 2x + 7y = 84.$$

Решение. Рассматривая данное уравнение как квадратное $y^2 + y(x-7) + 84 - 2x - 2x^2 = 0$

относительно y , найдем дискриминант $D = 9x^2 - 6x - 287 = (3x-1)^2 - 288$,

который должен быть точным квадратом, т.е. $(3x-1)^2 - 288 = u^2$. Отсюда следует,

что $u < 3x-1$. Положим, $u = (3x-1) - k$, где k – натуральное число. Тогда

получаем: $(3x-1)^2 - 288 = ((3x-1) - k)^2$, или $2k(3x-1) = k^2 + 288$, откуда видно,

что k – число четное. Пусть $k = 2l$, где l – натуральное число. Тогда находим:

$$l(3x-1) = l^2 + 72, \text{ или } 3x = l + \frac{72}{l} + 1. (*)$$

Отсюда видно, что число $\frac{72}{l}$ должно

быть натуральным, т.е. l должно быть делителем числа 72. Возможные значения для l : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

Из них надо взять лишь такие, для которых число $l + \frac{72}{l} + 1$ кратно 3. Этому

условию удовлетворяют лишь числа $l_1 = 2$, $l_2 = 8$, $l_3 = 9$, $l_4 = 36$. Затем из (*)

находим для x два значения: 13 и 6. Из исходного уравнения найдем соответствующие (только натуральные) значения y .

Ответ: (13;20); (6;0).

4. Уравнения высшей степени

4.1. Уравнение $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$ решите в целых числах.

Ответ: $x = y = z = 0$.

4.2. Решите в целых числах уравнение $4x^3 - 2y^3 - z^3 = 0$.

Ответ: $(0; 0; 0)$.

4.3. Решите уравнение $3x^2 + 4xy - 7y^2 - 13 = 0$ в целых числах.

Ответ: $(2; 1); (-2; -1)$.

4.4. Решите в целых числах уравнение $2x^2y^2 + y^2 - 6x^2 - 12 = 0$.

Ответ: $(-2; 2); (-2; 2); (2; -2); (2; 2)$.

4.5. Уравнение $x^3 + 91 = y^3$ решите в целых числах.

Решение. Данное уравнение перепишем в виде $(y - x)(y^2 + xy + x^2) = 13 \cdot 7$.

Поскольку

$$y^2 + xy + x^2 = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4} \geq 0, \quad \text{то}$$

возможны только следующие четыре случая:

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} y - x = 1 \\ y^2 + xy + x^2 = 91 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases} \\ 2) \begin{cases} y - x = 7 \\ y^2 + xy + x^2 = 13 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -5 \end{cases} \\ 3) \begin{cases} y - x = 13 \\ y^2 + xy + x^2 = 7 \end{cases} &\text{Нет решений.} \\ 4) \begin{cases} y - x = 91 \\ y^2 + xy + x^2 = 1 \end{cases} &\text{Нет решений.} \end{aligned}$$

Ответ: $(5; 6), (-6; -5), (-3; 4), (-4; 3)$.

4.6. Какие целые положительные числа могут удовлетворять уравнению $x + y + z = xyz$?

Решение. Для определенности пусть $x \leq y \leq z$. Из данного уравнения

получаем $3z \geq xyz$. Рассмотрим случай равенства $3z = xyz$, $xy = 3$, откуда

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases} \text{ При этих значениях } x$$

и y получаем из данного уравнения $z = 2$. Все эти значения не соответствуют нашему условию $x \leq y \leq z$.

Теперь пусть $3z > xyz$, $xy < 3$. Поскольку $0 < x \leq y$, возможны только следующие варианты: $x = 1, y = 1$ или $x = 1, y = 2$. Для первого варианта получаем из данного уравнения $z = 0$, что не соответствует условию задачи. Для второго варианта $z = 3$. Таким образом, при условии $x < y < z$ исходное уравнение имеет одно решение $x = 1, y = 2, z = 3$. Все остальные решения получаются из этого перестановками значений неизвестных x, y, z .

Ответ: $(1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1)$.

4.7. Решите в целых числах уравнение $19x^3 - 84y^2 = 1984$.

Указание. Перепишите уравнение в виде $19(x^3 - 100) = 84(1 + y^2)$. Правая часть кратна 7, поэтому $x^3 - 2$ кратно 7. Но кубы чисел при делении на 7 не дают в остатке 2.

Ответ: нет решений.

4.8. (2010). Найдите все решения в натуральных числах $x(y + 1)^2 = 243y$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде (учитывая, что $x \neq 0; y \neq 0$)

$$x = \frac{243y}{(y + 1)^2}.$$

Для того чтобы x было целым числом, знаменатель $(y + 1)^2$ должен быть одним из делителей числа 243, потому что y не может иметь общие множители с $y + 1$.

Поскольку $243 = 3^5$, то 243 делится только на следующие числа, являющиеся точными квадратами: $1^2, 3^2, 9^2$. Таким образом, число $(y + 1)^2$ должно быть равно 1, 9 или 81, откуда находим, что y равно 8 или 2. Значит,

$$x = \frac{243 \cdot 8}{81} = 24 \text{ или } x = \frac{243 \cdot 2}{9} = 54.$$

Ответ: $x = 24$; $y = 8$ или $x = 54$; $y = 2$.

4.9. (2010). Решите в целых числах уравнение $m \cdot n^2 = 10^5 n + m$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $m(n^2 - 1) = 10^5 n$. (1)

Если $n = 0$, то $m = 0$. Первое решение уравнения (1) найдено.

Если $n \neq 0$, то и $m \neq 0$. Заметим, что если пара чисел $(m_0; n_0)$ решение уравнения (1), то и пара $(-m_0; -n_0)$ - тоже решение уравнения (1).

Пусть $n > 0$ и $m > 0$, тогда $n \neq 1$.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$m(n-1)(n+1) = 10^5 n. \quad (2)$$

Так как ни $n-1$, ни $n+1$ не делятся на n , то m делится на n . Обозначим $m = nr$.

Разделив равенство (2) на n , имеем:

$$r(n-1)(n+1) = 10^5. \quad (3)$$

Число n не может быть четным, так как в этом случае два соседних нечетных числа $n-1$ и $n+1$ не могут являться степенями числа 5. Следовательно, число n нечетное, а $n-1$ и $n+1$ - два соседних четных числа, не имеющих простых делителей, кроме 2 и 5.

Выпишем первые два столбца четных чисел так, чтобы в первом столбце стояли числа, не имеющие делителей, кроме 2 и 5.

$n-1$	$n+1$
2	4
8	10
20	22
32	34
50	52
80	82
128	130
200	202

При этом во втором столбце, начиная с третьей строки, все числа имеют простой делитель, кроме 2 и 5. Это означает, что из выписанных множителей $n-1$ и $n+1$ только две пары чисел удовлетворяют условию, т.е. $n=3$ и $n=9$ отвечают

условиям задачи. Для последней строки таблицы из равенства (3) получим $p < 5$, что невозможно. Поэтому поиск значений n закончен.

При $n=3$ из равенства (3) получим, что $p=12500$, тогда $m = pn = 37500$.

При $n=9$ из равенства (3) получим, что $p=1250$, тогда $m = pn = 11250$.

Ответ: $m = -1$; $n = -9$ или $m = -37500$; $n = -3$ или $m = 0$; $n = 0$ или $m = 37500$; $n = 3$ или $m = 11250$; $n = 9$.

4.10. (2010). Найдите все натуральные числа x и y , для которых выполняется равенство $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2$.

Решение. Представим левую часть в виде

$$\left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{5}{8}x + \frac{55}{64} = y^2. \quad \text{Умножая}$$

обе части уравнения на 64, получаем $(8x^2 + 4x + 3)^2 + 40x + 55 = (8y)^2$.

Таким образом, $8y > 8x^2 + 4x + 3$,

$2y \geq 2x^2 + x + 1$. Умножим обе части исходного равенства на 4, а затем, используя

$$4y^2 \geq (2x^2 + x + 1)^2 = 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1,$$

будем иметь

$$4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \geq 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1,$$

$$\text{или } x^2 - 2x - 3 \leq 0, \quad \text{откуда } x \leq 3.$$

Осталось проверить для x значения 1, 2, 3.

Ответ: $x = 3$; $y = 11$.

Теорема. Если $ab = d^2$, a , b и d - натуральные числа, и числа a и b взаимно просты, то a и b - точные квадраты.

4.11. (ММО, 2002, 9 класс), (МИОО, 2010). Решите в целых числах уравнение $m^4 - 2n^2 = 1$.

Решение. Если $(m; n)$ - решение данного уравнения, то $(-m; n)$, $(m; -n)$ и $(-m; -n)$ тоже решения. Поэтому будем искать только неотрицательные решения. Из записи $m^4 = 2n^2 + 1$ следует, что m - нечетное число, $m = 2t + 1$. Перепишем уравнение в виде

$m^4 - 1 = (m-1)(m+1)(m^2 + 1) =$
 $= 2t \cdot (2t+2) \cdot (4t^2 + 4t + 2) = 2n^2$. Отсюда
 $8t \cdot (t+1) \cdot (2t^2 + 2t + 1) = 2n^2$, т.е. n –
 четное число, $n = 2p$. Далее получаем
 уравнение $t \cdot (t+1) \cdot (2t(t+1) + 1) = p^2$.
 Нетрудно проверить, что числа t , $t+1$ и
 $2t(t+1) + 1$ попарно взаимно просты.

Действительно, пусть, например, $d|t+1$
 и $d|2t(t+1)+1$, тогда d делит и $2t(t+1)$,
 а, значит, и разность
 $(2t(t+1)+1) - (2t(t+1))$. Взаимная
 простота двух остальных пар
 доказывается аналогично.

Произведение этих взаимно простых
 чисел – полный квадрат. Согласно
 теореме каждое из них также является
 полным квадратом.

Итак, t и $t+1$ – полные квадраты. Это
 возможно только при $t = 0$.
 Действительно, если $t = \alpha^2$, $t+1 = \beta^2$,
 где $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, то $(\beta - \alpha)(\beta + \alpha) = 1$,
 поэтому $\beta - \alpha = 1$, $\beta + \alpha = 1$, так что
 $\alpha = 0$, следовательно, $t = 0$. Тогда и
 $p = 0$. Значит, $m = \pm 1$; $n = 0$.

Ответ: $m = \pm 1$; $n = 0$.

4.12. (2010). Существуют ли
 рациональные числа x, y, u, v , которые
 удовлетворяют уравнению

$$(x + y\sqrt{2})^6 + (u + v\sqrt{2})^6 = 7 + 5\sqrt{2}?$$

Решение. Так как $(x + y\sqrt{2})^6 =$
 $= x^6 + 6x^5(y\sqrt{2}) + 15x^4(y\sqrt{2})^2 + 20x^3(y\sqrt{2})^3 +$

$$+ 15x^2(y\sqrt{2})^4 + 6x(y\sqrt{2})^5 + (y\sqrt{2})^6 =$$

$$= A + B\sqrt{2},$$

$$(x - y\sqrt{2})^6 =$$

$$= x^6 - 6x^5(y\sqrt{2}) + 15x^4(y\sqrt{2})^2 - 20x^3(y\sqrt{2})^3 +$$

$$+ 15x^2(y\sqrt{2})^4 - 6x(y\sqrt{2})^5 + (y\sqrt{2})^6 =$$

$$= A - B\sqrt{2}, \text{ то выполняется}$$

$$(x - y\sqrt{2})^6 + (u - v\sqrt{2})^6 = 7 - 5\sqrt{2}.$$

Но $7 - 5\sqrt{2} < 0$, а левая часть
 положительная. Противоречие.

Следовательно, исходного равенства
 быть не может.

Ответ: таких чисел нет.

4.13. (ММО, 1972, 9 класс).
 Существуют ли рациональные числа a, b ,
 c, d , которые удовлетворяют уравнению
 $(a + b\sqrt{2})^{2n} + (c + d\sqrt{2})^{2n} = 5 + 4\sqrt{2}$
 (где n – натуральное число)?

Ответ: таких чисел нет.

4.14. (2010). Найдите наименьшее и
 наибольшее натуральные значения n ,
 при которых уравнение

$$(x^2 + y^2)^{2010} = x^n y^n$$

имеет натуральные решения.

Решение. При любом n пара $x = 1, y = 1$
 не является решением. Поэтому
 $(xy)^n = (x^2 + y^2)^{2010} \geq (2xy)^n > (xy)^{2010}$.

Значит, $n > 2010$.

Предположим, $x \neq y$. Тогда найдется
 простое число p , такое что $x = p^k a$,
 $y = p^m b$, и числа a и b не делятся на p .
 Для определенности можно считать, что
 $k > m \geq 0$.

$$\text{Тогда } (p^{2k} a^2 + p^{2m} b^2)^{2010} = (p^{k+m} ab)^n;$$

$$(p^{2(k-m)} a^2 + b^2)^{2010} = a^n b^n p^{n(k+m)-2m \cdot 2010}. (*)$$

Из условий $n > 2010$ и $k > m$ получаем:
 $n(k+m) - 2m \cdot 2010 = (nk - 2010m) + m(n - 2010) >$

Значит, правая часть равенства (*) –
 целое число, которое делится на p .

Левая часть на p не делится.
 Противоречие.

Пусть теперь $x = y$, тогда из равенства
 $(x^2 + x^2)^{2010} = (x^2)^n$ получаем:
 $x^{n-2010} = 2^{1005}$. Откуда $x = 2^q$, $q = 0, 1, 2, \dots$
 и $q(n - 2010) = 1005$.

Поэтому $n - 2010$ натуральный делитель
 числа 1005. По условию нас интересуют
 только наименьшее и наибольшее
 возможное значение n . Поэтому нужно
 взять $n - 2010 = 1$ и $n - 2010 = 1005$,
 откуда $n = 2011$ и $n = 3015$. При $n = 2011$
 $x = y = 2^{1005}$, при $n = 3015$ $x = y = 2$.

Ответ: 2011; 3015.

4.15. (2010). Найдите наименьшее и
 наибольшее натуральные значения n ,
 при которых уравнение

$$\frac{2012 \ln(x^2 + y^2)}{n} = \ln(xy)$$

имеет натуральные решения.

Указание. Привести уравнение к виду $(x^2 + y^2)^{2012} = x^n y^n$

Ответ: 2013; 3018.

4.16. (ММО, 1958, 10 класс). Решите в целых положительных числах уравнение $x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}$.

Указание. Если $y=1$, то $x=3$ (второй корень квадратного уравнения $x=-1$ отрицателен). Пусть $y>1$. Числа x и $x+2$ одной четности, поэтому $(x+1)$ чётно: $x+1=2k$. Получаем: $(2k-1)^{2y} + (2k)^{2y} = (2k+1)^{2y}$, откуда несложно увидеть (раскрыв скобки), что y кратно k при $y>1$. Разделив теперь обе части уравнения на $(2k)^{2y}$, получим:

$$2 > \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^{2y} + 1 = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2y} > 1 + \frac{2y}{2k}.$$

Отсюда $y < k$, а потому y не может делиться на k . Значит, при $y>1$ решений нет.

Ответ: $x=3; y=1$.

4.17. (МГУ, 1989). Найдите все целые числа x и y , удовлетворяющие равенству $9x^2y^2 + 6xy^2 - 9x^2y + 2x^2 + y^2 - 18xy + 7x - 5y + 6 = 0$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители

$$y^2(3x+1)^2 - y(3x+1)(3x+5) + 2x^2 + 7x + 6 =$$

$$= \left(y(3x+1) - \frac{3x+5}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 =$$

$$= (y(3x+1) - 2x - 3)(y(3x+1) - x - 2).$$

Откуда следует, что искомые числа удовлетворяют хотя бы одному из уравнений

$$y(3x+1) - 2x - 3 = 0 \quad \text{или}$$

$$y(3x+1) - x - 2 = 0, \quad \text{которые приводятся}$$

$$\text{к виду } (3x+1)(3y-1) = 5 \quad \text{или}$$

$$(3x+1)(3y-2) = 7. \quad \text{Решая эти уравнения}$$

в целых числах, получаем четыре пары чисел.

Ответ: $(0; -2), (-2; 0), (0; 3), (2; 1)$.

4.18. (МГУ, 1989). Найдите все целые числа x и y , удовлетворяющие равенству $15x^2y^2 - 8xy^2 + 28y^2x + x^2 + 5y^2 - 38xy + 8x - 24y + 16 = 0$.

Ответ: $(-2; 2), (-4; 0), (0; 4)$.

4.19. (МГУ, 1979). Найдите все тройки целых чисел $(x; y; z)$, для каждой из которых выполняется соотношение $3(x-3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33$.

Решение. Из условия следует, что $3(x-3)^2 \leq 33$, т.е. $(x-3)^2 \leq 11$.

Поскольку $(x-3)^2$ является квадратом целого числа $x-3$, то $(x-3)^2$ равно либо 0, либо 1, либо 4, либо 9. Перепишем исходное уравнение в виде $3(x-3)^2 + (z^2+2)(3y^2+2) = 37$.

Если $(x-3)^2 = 0$, то $(z^2+2)(3y^2+2) = 37$. Так как 37 – число простое, то последнее равенство выполняться не может.

Если $(x-3)^2 = 1$, то $(z^2+2)(3y^2+2) = 34$.

Поскольку $z^2+2 \geq 2$, $3y^2+2 \geq 2$, то возможны две системы

$$\begin{cases} z^2+2=2 \\ 3y^2+2=17 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z^2+2=17 \\ 3y^2+2=2, \end{cases} \quad \text{которые}$$

не имеют решений в целых числах.

Если $(x-3)^2 = 4$, то $(z^2+2)(3y^2+2) = 25$, откуда следует система

$$\begin{cases} z^2+2=5 \\ 3y^2+2=5, \end{cases} \quad \text{которая не имеет решений}$$

в целых числах.

Если $(x-3)^2 = 9$, т.е. если $x=6$ или $x=0$, то $(z^2+2)(3y^2+2) = 10$. Так как $z^2+2 \geq 2$, $3y^2+2 \geq 2$, то отсюда

следуют две системы

$$\begin{cases} z^2+2=5 \\ 3y^2+2=2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z^2+2=2 \\ 3y^2+2=5, \end{cases} \quad \text{первая из}$$

которых не имеет решений в целых числах. Из второй системы получаем, что либо $z=0, y=1$, либо $z=0, y=-1$.

Следовательно, исходному соотношению удовлетворяют четыре тройки чисел.

Ответ: $(6; 1; 0), (6; -1; 0), (0; 1; 0), (0; -1; 0)$.

4.20. (МГУ, 1979). Найдите все тройки целых чисел $(x; y; z)$, для каждой из которых выполняется соотношение $5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30$.

Ответ:

$(1; 5; 0), (1; -5; 0), (-1; 5; 0), (-1; -5; 0)$.

5. Дробно-рациональные уравнения

5.1. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Решение. Поскольку неизвестные x, y, z входят в уравнение симметрично, то можно считать, что $x \leq y \leq z$. Остальные решения получатся перестановками неизвестных. Тогда

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x}, \text{ т.е. } x \leq 3.$$

Очевидно, что $x \neq 1$.

Пусть $x = 2$, т.е. $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$. Также ясно,

что $y \neq 2$. Если $y = 3$, то $z = 6$. Если $y = 4$, то $z = 4$. Если $y = 5$, то даже $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$, т.е. других решений при $x = 2$ нет.

Если $x = 3$, то $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$. Пусть $y = 3$,

тогда $z = 3$. Если $y = 4$, то даже $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} < \frac{2}{3}$, т.е. других решений при $x = 3$ нет. Следовательно, данное уравнение с учетом перестановок имеет десять решений.

Ответ: $(3; 3; 3); (2; 4; 4); (4; 2; 4); (4; 4; 2); (2; 3; 6); (2; 6; 3); (3; 2; 6); (3; 6; 2); (6; 2; 3); (6; 3; 2)$.

5.2. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

Указание. Выразите из уравнения y и исследуйте полученную функцию.

Ответ: $(4; 4); (6; 3); (3; 6)$.

5.3. (МИОО, 2010). Найдите все пары натуральных чисел разной четности, удовлетворяющие уравнению $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{12}$

Решение. Пусть $m < n$. Приведем уравнение к виду $12m + 12n = mn \Leftrightarrow mn - 12m - 12n + 12^2 = 12^2 \Leftrightarrow (m - 12)(n - 12) = 12^2$, причем числа $m - 12$ и $n - 12$ - разной четности.

В качестве возможного разложения $12^2 = 2^4 \cdot 3^2 = pq$, где p - нечетно, а q - четно, имеем следующие варианты:

$$1) \begin{cases} p = 1 \\ q = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 12 = 1 \\ n - 12 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m = 13 \\ n = 156 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} p = 3 \\ q = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 12 = 3 \\ n - 12 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 15 \\ n = 60 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} p = 9 \\ q = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 12 = 9 \\ n - 12 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 21 \\ n = 28 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} p < 0 \\ q < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12 < m - 12 < 0 \\ -12 < n - 12 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(m - 12)(n - 12) < 12^2.$$

Неизвестные m и n входят в уравнение симметрично. Поэтому получаем ответ.

Ответ: $(13; 156); (15; 60); (21; 28), (156; 13); (60; 15); (28; 21)$.

5.4. (МИОО, 2010). Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{25}$, где $m > n$.

Ответ: $m = 150; n = 30$ или $m = 650; n = 26$.

6. Иррациональные уравнения

6.1. (Московская математическая регата, 2002/2003, 11 класс). Найдите все целые решения уравнения

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} = y - 2002.$$

Решение. Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x + \sqrt{x} = (y - 2002)^2 \\ y \geq 2002 \end{cases}$$

По условию, x – целое число, поэтому $t = \sqrt{x}$ – также целое.

Чтобы уравнение $t^2 + t - (y - 2002)^2 = 0$ имело целые решения, необходимо, чтобы дискриминант $D = 1 + 4(y - 2002)^2$ являлся полным квадратом. Так как второе слагаемое, в свою очередь, при всех целых значениях y является полным квадратом, то следующее за ним натуральное число является квадратом тогда и только тогда, когда $(y - 2002)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 2002$. Откуда $t = 0$ или $t = -1$, то есть, $x = 0$.

Ответ: $x = 0$; $y = 2002$.

6.2. Решите в целых числах уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{98}$.

Решение. Из уравнения видно, что $0 \leq x \leq 98$, $0 \leq y \leq 98$. Представим уравнение в виде $\sqrt{y} = \sqrt{98} - \sqrt{x}$ и возведем обе части уравнения в квадрат:

$$y = 98 + x - 2\sqrt{98x}, \quad y = 98 + x - 14\sqrt{2x}.$$

Отсюда $2x = 4a^2$, $x = 2a^2$, где a – целое неотрицательное число. Так как $x \leq 98$, то $2a^2 \leq 98$, $a^2 \leq 49$, $0 \leq a \leq 7$.

Для каждого из значений a получаем значения x , и затем значения y .

Ответ: (0;98); (2;72); (8;50); (18;32); (32;18); (50;8); (72;2); (98;0).

7. Показательные уравнения

7.1. (2010). Найдите все пары натуральных чисел m и n , являющиеся решениями уравнения $2^m - 3^n = 1$.

Решение. При любом k число $3^{2k} + 1$ при делении на 8 дает остаток 2, а число $3^{2k+1} + 1$ при делении на 8 дает остаток 4. Так как при $m \geq 3$ число 2^m делится на 8 без остатка, то равенство $3^n + 1 = 2^m$ возможно при $m = 1$ или $m = 2$.

Если $m = 1$, то получаем $n = 0$.

Если $m = 2$, то получаем $n = 1$.

Ответ: $m = 2$, $n = 1$.

7.2. (2010). Найдите все пары натуральных чисел m и n , являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$.

Решение. Пусть n – четное число, т.е. $n = 2k$. Тогда $2^m = (3^k - 1)(3^k + 1)$. Правая часть – произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Значит, $3^k - 1 = 2$ и $3^k + 1 = 4$, откуда $k = 1$ и $n = 2$. Тогда $m = 3$.

Пусть теперь n – нечетное число. Нечетная степень тройки при делении на 4 дает остаток 3. Значит, $3^n - 1$ делится на 4 с остатком 2. Так как при $m \geq 2$ число 2^m делится на 4 без остатка, то равенство $2^m = 3^n - 1$ возможно в случае $m = 1$. Тогда $n = 1$.

Ответ: $m = 3$, $n = 2$ или $m = n = 1$.

7.3. (2010). Решите в натуральных числах уравнение $2^x - 15 = y^2$.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) $x = 2k + 1$ (x – нечетное число). Поскольку 2^2 при делении на 3 дает в остатке 1, то и $2^{2k} = (2^2)^k$ дает в остатке 1, а $2^{2k+1} = 2 \cdot 2^{2k}$ дает в остатке 2. Число 15 делится на 3, следовательно, левая часть уравнения при делении на 3 дает в остатке 2. Правая часть (квадрат числа) дает при делении на 3 в остатке 0 или 1 (докажите). Таким образом, равенство невозможно (левая и правая части дают при делении на 3 разные остатки).

2) $x = 2k$. Тогда $2^{2k} - y^2 = 15$, откуда $(2^k - y)(2^k + y) = 15$. Оба множителя слева целые и положительные (так как второй множитель положителен), второй больше первого. Возможны два варианта:

$$\begin{cases} 2^k - y = 1 \\ 2^k + y = 15 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2^k - y = 3 \\ 2^k + y = 5 \end{cases}$$

Решая эти системы, получаем ответ.

Ответ: (4;1); (6;7).

7.4. Решите в целых числах уравнение $2^x - 1 = y^2$.

Ответ: (1;1); (1;-1); (0;0).

7.5. (2010). Решите в целых числах уравнение $3^n + 8 = x^2$.

Ответ: $n = 0$; $x = 3$ или $n = 0$; $x = -3$.

7.6. (2010). Решите в целых числах уравнение $1 + 2^k + 2^{2k+1} = n^2$.

Решение. При $k=1$ получаем уравнение $n^2=11$, которое не имеет решений в целых числах.

Если $k=0$, то $n=\pm 2$.

При $k=-1$ уравнение не имеет решений в целых числах.

Если $k < -1$, то уравнение не имеет решений, так как левая часть данного уравнения принимает значения из промежутка $(1; 2)$.

Пусть $k \geq 2$. Как известно, четные степени двойки дают при делении на 3 остаток 1, нечетные – 2. Отсюда следует, что $1+2^{2k+1}$ делится на 3 без остатка, а число $1+2^k+2^{2k+1}$ при делении на 3 дает такой же остаток, как у 2^k . С другой стороны, квадраты целых чисел не могут давать при делении на 3 остаток 2. Таким образом, k – четное. Положим $k=2d$, $d \in \mathbb{N}$ и перепишем уравнение в виде $1+4^d+2 \cdot 4^{2d}=n^2$. Отсюда следует, что n – нечетное, т.е. $n=2x+1$, $x \in \mathbb{N}$.

Получаем уравнение

$$1+4^d+2 \cdot 4^{2d}=4x^2+4x+1;$$

$$4^d(1+2 \cdot 4^d)=4(x^2+x);$$

$$4^y(1+8 \cdot 4^y)=x(x+1), \quad \text{где } y=d-1.$$

Причем $y > 0$, так как при $d=1$, т.е. $y=0$ последнее уравнение не имеет решений.

Из чисел x и $x+1$ только одно четное, и оно делится на 4^y .

Если $x=m \cdot 4^y$ (причем m – нечетное, $m \in \mathbb{N}$), то имеем

$$4^y(1+8 \cdot 4^y)=m \cdot 4^y(m \cdot 4^y+1);$$

$$1+8 \cdot 4^y=m^2 \cdot 4^y+m; \quad (8-m^2) \cdot 4^y=m-1.$$

Сравнивая знаки левой и правой частей последнего уравнения, получаем одно нечетное $m=1$, которое не является решением.

Если $x+1=m \cdot 4^y$ (причем m – нечетное, $m \in \mathbb{N}$), то имеем

$$4^y(1+8 \cdot 4^y)=(m \cdot 4^y-1)m \cdot 4^y;$$

$$1+8 \cdot 4^y=m^2 \cdot 4^y-m; \quad (m^2-8) \cdot 4^y=m+1.$$

Выражение m^2-8 неотрицательно при натуральных $m \geq 3$. Если $m=3$, то $y=1$ (что приводит к решению исходного

уравнения $k=4; n=\pm 23$). При натуральных $m \geq 4$ будет $m^2-8 > m+1$, и решений нет.

Ответ: $k=0; n=\pm 2$ или $k=4; n=\pm 23$.

7.7. (ММО, 1998, 11 класс), (МИОО, 2010). Решите уравнение $3^m+4^n=5^k$ в натуральных числах.

Ответ: $m=n=k=2$.

8. Уравнения смешанного типа

8.1. (МИОО, 2010). Найдите все пары натуральных k и n таких, что $k < n$ и

$$\left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(\frac{1}{k}\right)^n.$$

Указание. Приведите уравнение к виду $(n)^k = (k)^n$.

Ответ: $k=2, n=4$.

8.2. (МГУ, 1979). Найдите все целые корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right)\right) = 1.$$

Решение. Из данного уравнения получаем

$$\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right) = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда приходим к иррациональному

$$\sqrt{9x^2 + 160x + 800} = 3x - 16n,$$

$$\begin{cases} 9x^2 + 160x + 800 = (3x - 16n)^2, \\ 3x - 16n \geq 0; x, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Уравнение системы приведем к виду $x(3n+5) = 8n^2 - 25$. (*)

$$\text{Так как } 8n^2 - 25 = 8\left(n^2 - \frac{25}{9}\right) - \frac{25}{9} =$$

$$= \frac{8}{9}(3n+5)(3n-5) - \frac{25}{9}, \text{ то уравнение (*)}$$

имеет вид

$$8(3n+5)(3n-5) - 9x(3n+5) = 25 \text{ или}$$

$$(3n+5)(8(3n-5) - 9x) = 25. \quad \text{Последнее}$$

равенство означает, что $3n+5$ является делителем числа 25, т.е. $3n+5$ есть одно из чисел $\pm 1, \pm 5, \pm 25$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это возможно только если n равняется одному из

чисел $n_1 = -10$, $n_2 = -2$, $n_3 = 0$.
 Соответствующие значения x находятся из равенства (*): $x_1 = -31$, $x_2 = -7$, $x_3 = -5$.
 Условию $3x - 16n \geq 0$ удовлетворяют значения $n_1 = -10$, $x_1 = -31$ и $x_2 = -7$, $n_2 = -2$.

Ответ: $x_1 = -31$, $x_2 = -7$.

8.3. (МГУ, 1979). Найдите все целые корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 80x - 40}\right)\right) = 1.$$

Ответ: -13 , -59 .

9. Уравнения, содержащие знак факториала

9.1. (МИОО, 2010). Решите в натуральных числах уравнение $n! + 5n + 13 = k^2$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ – произведение всех натуральных чисел от 1 до n .

Решение. Предположим, что $n \geq 5$. Тогда $n!$ делится на 2 и 5, а значит десятичная запись числа в левой части оканчивается на 3 или на 8. Перебор по последней цифре показывает, что квадрат целого числа не может оканчиваться ни на 3, ни на 8.

Наконец, перебирая n от 1 до 4 находим единственное решение.

Ответ: $n = 2$; $k = 5$.

9.2. Уравнение $x! + y! = (x + y)!$ решите в целых числах.

Решение. Рассмотрим случай, когда $x < y$, тогда

$$x!(1 + (x+1)(x+2)\dots y) = x!(x+1)(x+2)\dots(x+y).$$

Поделив обе части этого уравнения на $x!$, легко заметить, что правая часть делится на $x+1$, а левая не делится, т.е. в этом случае данное уравнение не имеет решений в целых числах. Аналогично рассматривается случай, когда $x > y$. Пусть $x = y$, т.е. $2x! = (2x)!$. Поделив обе части этого уравнения на $x!$, получим $2 = (x+1)(x+2)\dots 2x$, т.е. $x = 1$, а следовательно, и $y = 1$.

Ответ: $x = 1$, $y = 1$.

9.3. (Московская математическая регата, 2003/2004, 11 класс). Найдите все натуральные значения n , для которых выполняется равенство: $n^3 - n = n!$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде

$$n(n-1)(n+1) = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 2 \cdot 1.$$

Так как $n = 1$ не является его решением, то разделим обе части уравнения на $n(n-1)$. Получим, что

$$n+1 = (n-2)(n-3)\dots 2 \cdot 1.$$

Проверяя последовательные натуральные значения n , начиная с $n = 2$, получим, что решением уравнения является $n = 5$. Так как для всех $n > 5$ верно, что $n+1 < 2n-4 = 2(n-2)$, то $n+1 < (n-2) \cdot 2 < (n-2)(n-3)\dots 2 \cdot 1$, поэтому других натуральных решений данное уравнение не имеет.

Ответ: $n = 5$.

10. Уравнения с простыми числами

10.1. Уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ решите в простых числах.

Решение. Так как $2y^2$ – четное число, то x – нечетно, и потому число $2y^2 = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ делится на 4. Следовательно, y – четное число, и поскольку x и y должны быть простыми числами, то $y = 2$, а потому $x = 3$.

Ответ: $x = 3$, $y = 2$.

10.2. Решите в простых числах уравнение $x^y + 1 = z$.

Решение. Число z больше 2, так как если $z = 2$, то $x = 1$, а это не возможно. Тогда z нечетно, а следовательно, число x четно. Но x – простое, поэтому $x = 2$. Получаем уравнение: $2^y + 1 = z$.

Если y нечетно, то сумма $2^y + 1$ делится на 3, причем частное от такого деления больше 1; но в этом случае z составное. Значит, число y четное, т.е. $y = 2$. Находим $z = 5$.

Ответ: $x = 2$, $y = 2$, $z = 5$.

11. Неразрешимость уравнений

11.1. Докажите, что уравнение $x! + y! = 10z + 9$ не имеет решений в натуральных числах.

Решение. Так как правая часть уравнения – нечетное число, то и левая часть должна быть нечетным числом. Поэтому или x , или y меньше 2. Пусть для определенности, $x = 1$, т.е. $y! = 10z + 8$. Правая часть последнего равенства не делится на 5, а потому $y \leq 4$, но ни одно из натуральных чисел, которые удовлетворяют этому неравенству, не служат решением данного уравнения. Итак, данное уравнение не имеет решений в натуральных числах.

11.2. (ВМО, 1992, 9 класс). Докажите, что уравнение $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$ не имеет решений в целых числах.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x + y)^3 = 7(x^2y + xy^2) + 4$. Так как куб целого числа не может давать остаток 4 при делении на 7, то уравнение не имеет решений в целых числах.

Замечание. Другие решения задачи можно получить, рассматривая остатки, которые могут давать числа x и y при делении на 4, или заметив, что из уравнения следует, что $x + y$ – делитель числа 4.

11.3. (ММО, 1946, 8-9 классы). Докажите, что выражение $x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$ не равно 33 ни при каких целых значениях x и y .

Указание. Данное выражение преобразуйте к виду $(x - 2y)(x - y)(x + y)(x + 2y)(x + 3y)$.

Полученные сомножители попарно различны. Но число 33 нельзя разложить более чем на 4 различных сомножителя.

11.4. (ММО, 1949, 7-8 классы). Докажите, что равенство $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ для целых чисел x, y, z возможно только при $x = y = z = 0$.

Указание. Правая часть равенства всегда делится на более высокую степень двойки, чем левая.

11.5. Существуют ли целые числа m и n , удовлетворяющие уравнению $m^2 + 2010 = n^2$?

Указание. Не существуют, так как $m^2 - n^2$ нечетно или кратно 4, а 2010 – нет.

11.6. Докажите, что уравнение $x^2 + 1 = 3y$ не имеет решений в целых числах.

Указание. Рассмотреть остатки от деления левой и правой части на 3.