Задания С6 ЕГЭ олимпиадного характера

1. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 11 раз больше, либо в 11 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2231.
а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
б) Может ли последовательность состоять из трех членов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?
Решение.
а) Допустим, последовательность состоит из двух членов. Тогда один из них больше второго в 11 раз. Обозначим наименьший член через a, тогда имеем $a+11a=2231$, $12a=2231$, $a=\frac{2231}{12}$
Уравнение не имеет решений в натуральных числах.
б) Допустим, последовательность состоит из трех членов. Например: $11a$, a, $11a$. Тогда имеем $11a+a+11a=2231$, $23a=2231$, $a=97$. Последовательность может состоять из трех членов, например: $11\cdot 97=1067$, 97, 1067.
в) Чем больше маленьких чисел в последовательности, тем больше членов в последовательности. Путь имеется n пар чисел: 1; 11; 1;11; …. 1;11. Тогда их сумма $12n=2231$. Уравнение не имеет решений в натуральных числах.
Добавим 1 к первой последовательности 1; 11; 1;11; …. 1;11; 1. Сумма $12n+1=2231$, $n=\frac{1115}{6}$ не является натуральным числом.
Добавим 11 к первой последовательности 11; 1; 11; 1;11; ….1;11. Сумма $12n+11=2231$. Отсюда $n=185$. Тогда количество членов равно $185\cdot 2+1=371$.
Ответ: а) не может; **б)** может, например: 1067; 97; 1067. **в)** наибольшее количество членов 371.

2. Набор состоит из тридцати трех натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых двадцати семи чисел этого набора меньше 2.
а) Может ли такой набор содержать ровно тринадцать единиц?
б) Может ли такой набор содержать менее тринадцати единиц?
в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.
Решение.
а) Да, может. Например, сумма любых двадцати семи чисел из набора $5,\ 4,\ 3,\ \underbrace{2,\ldots,2}_{17},\ \underbrace{1,\ldots,1}_{7}$ не больше, чем $5+4+3+2\cdot 17+7=53$, и их среднее арифметическое меньше 2.
б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим первые 27 чисел, считая слева. Их сумма *S* меньше 54. Пусть количество единиц среди них равно *x*. Тогда $53\ge S\ge x+2(24-x)+3+4+5,\ x\ge 7,$ то есть среди выбранных 27 чисел всегда есть семь единиц. Каждое из оставшихся шести чисел равно 1, и поэтому во всем наборе есть как минимум тринадцать единиц.
в) Используя тринадцать единиц и числа 3, 4, 5, можно составить все суммы от 1 до 25.
Если среди оставшихся семнадцати чисел есть число от 3 до 27, то его можно добавить и получить в сумме 28.
Если среди оставшихся семнадцати чисел нет чисел от 3 до 27, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 27. Так как сумма этих семнадцати чисел не больше 53, то только одно из чисел может быть больше 27. Значит, в этом случае как минимум шестнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и тринадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 28.
Ответ: а) да; **б)** нет.

3. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

а) пять;
б) четыре;
в) три
из них образуют геометрическую прогрессию?
Решение.
а) Пусть *n* – количество последовательных членов геометрической прогрессии, произведение которых делит 1512. Так как $1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1$, то члены геометрической прогрессии состоят только из простых множителей 2, 3 и 7. Пусть первый член равен $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$, а знаменатель прогрессии равен $2^d \cdot 3^e \cdot 7^f$ (a, b, c, d, e, f – целые неотрицательные числа, при этом хотя бы одно из чисел d, e, f больше нуля). Тогда произведение чисел равно

$$2^{na+d+2d+...+(n-1)d} \cdot 3^{nb+e+2e+...+(n-1)e} \cdot 7^{nc+f+2f+...+(n-1)} =$$

$$2^{na+\frac{(n-1)n}{2}d} \cdot 3^{nb+\frac{(n-1)n}{2}e} \cdot 7^{nc+\frac{(n-1)n}{2}f}.$$

Полученное число является делителем числа $1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1$. Следовательно,

$$na + \frac{(n-1)nd}{2} \le 3,\ nb + \frac{(n-1)ne}{2} \le 3,\ nc + \frac{(n-1)nf}{2} \le 3.$$

Если $n \ge 4$, то $na + \frac{(n-1)nd}{2} \ge 4a + 6d$.

Аналогично $nb + \frac{(n-1)ne}{2} \ge 4b + 6e$ и $nc + \frac{(n-1)nf}{2} \ge 4c + 6f$. Неравенства $4a + 6d \le 3,\ 4b + 6e \le 3$ и $4c + 6f \le 1$ имеют целые неотрицательные решения только при $d = e = f = 0$, что невозможно. Следовательно, $n \le 3$. Тем самым мы ответили на вопросы а) и б) – ни пять, ни четыре числа не могут образовывать геометрическую прогрессию и иметь при этом произведение, которое делит число 1512.

Приведем пример пяти чисел, удовлетворяющих условию задачи при $n = 3$. Положим $a = b = c = e = f = 0,\ d = 1$. Получаем три члена геометрической прогрессии 1, 2, 4. Их произведение равно 8. Так как $\frac{1512}{8} = 189 = 3 \cdot 63$, то в качестве четвертого и пятого чисел можно взять, например, числа, 3 и 63: $1512 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 63$.
Ответ: а) нет; **б)** нет; **в)** да.

4. Перед каждым из чисел 2, 3, …, 6 и 10, 11, …, 20 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 55 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?
Решение.
1. Если все числа взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$11(2 + ... + 6) + 5(10 + ... + 20) = 11\left(\frac{2+6}{2} \cdot 5\right) + 5\left(\frac{10+20}{2} \cdot 11\right) = 55 \cdot 19 = 1045.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна нулю.
3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:
$$11(-2+3-4+5-6)+5(10+11-12-13+14+15-16-17+18+19-20) = -11 \cdot 4 + 5 \cdot 9 = -44 + 45 = 1.$$
Ответ: 1 и 1045.

5. На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две – третье и т.д.).

а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?

б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел равняться 63?

в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 784?

Решение.

а) Заметим, что каждое число на доске будет делиться на 7. Действительно, исходное число делится на 7, в случае удвоения числа делящегося на 7, получится число, делящееся на 7. А при сложении чисел, делящихся на 7, также получится число, делящееся на 7. Таким образом, все числа на доске будут делиться на 7, а 2012 на 7 не делится, следовательно, оно не может появиться на доске.

б) Да, может. Пример: 7, 14 (удвоенное число 7), 14 (удвоенное число 7), 14 (удвоенное число 7), 14 (удвоенное число 7). Сумма полученных 5 чисел равна 63.

в) Как было замечено в пункте *а*, все числа на доске будут делиться на 7. Рассмотрим аналогичную задачу, разделив исходное число 7 и то число, которое нужно получить, т.е. 784, на 7. От этого количество операций не изменится. Таким образом, достаточно за наименьшее количество операций получить 112, начав с числа 1.

Заметим, что наибольшее число, которое может получиться на доске через 6 минут, равно 64 (если Вася каждый раз будет удваивать текущее наибольшее число). Следовательно, если в первые 6 минут Вася каждый раз удваивал наибольшее число на доске, то число 112 нельзя получить за 7 минут: если число 64 удвоить, то получится 128, а если прибавить к нему число, не превосходящее 32, то 112 не получится.

В том случае, если в течение первых 6 минут Вася использовал хотя бы одно сложение вместо удвоения, то при первом использовании сложения наибольшее число, записанное на доске увеличилось не более, чем в полтора раза: действительно, в этом случае самый большой результат получится тогда, когда мы к максимальному на данный момент числу прибавим второе по величине, то есть его половину. Таким образом, даже если в течение первых 7 минут сделано 6 удвоений и одно сложение (в некотором порядке), то наибольшее число, которое может получиться, равно $2^6 \cdot 1{,}5 = 96$, что меньше 112.

Итак, за 7 минут число 112 получить невозможно.

Приведем пример, как его получить за 8 минут: 1 → 1, 2 → 1, 2, 4 → 1, 2, 4, 8 → 1, 2, 4, 8, 16 → 1, 2, 4, 8, 16, 32 → 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 → 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 96 → 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 96, 112.

Ответ: а) нет; **б)** да; **в)** 8 минут.

6. Числа от 2 до 11 записаны в строчку в некотором порядке. Всегда ли можно вычеркнуть несколько чисел так, чтобы осталось:

а) три числа в порядке возрастания или в порядке убывания?

б) пять чисел в порядке возрастания или в порядке убывания?

в) четыре числа в порядке возрастания или в порядке убывания?

Решение.

а) Да, всегда. Если 2 и 11 стоят не подряд, то они вместе с любым числом между ними дают нужную тройку. Если 2 и 11 стоят подряд, то либо перед ними, либо после них есть пара чисел. Добавляя к ней 2 или 11, получим требуемое.

б) Если числа стоят, например, в порядке 8, 7, 9, 5, 11, 2, 3, 6, 4, 10, то выбрать нельзя. В самом деле, возрастающая последовательность из пяти чисел не может содержать более чем по одному числу из каждого из наборов (8, 7, 5, 2), (9, 6, 4), (11, 10), (3).

Аналогично убывающая последовательность из пяти чисел не может содержать более чем по одному числу из каждого из наборов 8; 9; 11; 2, 3, 4, 10; 5, 6; 7.

в) Да, всегда. Запишем над каждым числом пару чисел $(a;b)$, где *a* – длина наибольшей возрастающей последовательности, начинающейся с этого числа, *b* – наибольшей убывающей. Все пары $(a;b)$ различны (например, первое число левее и меньше второго, то можно взять возрастающую последовательность со второго и удлинить ее первым числом, аналогично

разбираются остальные варианты). Но пар из чисел от 1 до 3 всего 9 штук, а чисел 10, поэтому в каких-то парах попадутся числа, не меньшие четырех.
Ответ: а) да; **б)** нет; **в)** да.

7. На листе бумаги написаны в строчку 13 единиц.
а) Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.
б) Докажите, что если единицы, стоящие на четных местах, заменить семерками, все равно между числами полученного набора можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.
в) Докажите, что между любыми 13 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.
Решение.
Для доказательства пунктов а) и б) достаточно привести примеры расстановки знаков сложения, умножения и скобок для данных наборов чисел. Такая расстановка в каждом случае не является единственной.
Заметим, что $108 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2$.
а) Например, $(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1+1) = 108$.
б) Например, $(1+7+1)\cdot(7+1+7)\cdot(1+7+1)\cdot(7+1+7+1)$. Очевидно, что каждый из первых трех сомножителей делится на 3, а последний делится на 4, поэтому все произведение делится на $3\cdot 3\cdot 3\cdot 4 = 108$.
в) Любой набор из 13 натуральных чисел $a_1, a_2, ..., a_{13}$ можно разбить на три группы из трех чисел и две группы из двух чисел, заключив их в скобки и поставив между скобками знаки умножения: $(a_1a_2a_3)\cdot(a_4a_5a_6)\cdot(a_7a_8a_9)\cdot(a_{10}a_{11})\cdot(a_{12}a_{13})$.
Покажем, что между любыми двумя натуральными числами можно поставить знак сложения или умножения так, что результат будет делиться на 2. Если одно из двух чисел четное, то поставим между ними знак умножения. Результат будет делиться на 2. Если оба числа нечетные, то поставим между ними знак сложения. Результат будет делиться на 2.
Покажем, что между любыми тремя натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что результат будет делиться на 3. Если одно из трех чисел делится на 3, то поставим между числами знаки умножения. Результат будет делиться на 3. Предположим, что все эти числа не делятся на 3. Если у каких-то двух подряд идущих чисел остатки от деления на 3 различны (один равен 1, другой равен 2), то поставим между ними знак сложения, заключим эту пару в скобки и поставим знак умножения между этими скобками и оставшимся из трех чисел. Сумма двух чисел в скобках делится на 3, поэтому произведение этой суммы на оставшееся число также будет делиться на 3.
Если у каждой пары подряд идущих чисел остатки от деления на 3 одинаковы, то у всех трех чисел одинаковые остатки от деления на 3. Поставим между этими числами знаки сложения. Результат будет делиться на 3.
Таким образом, расставив в трех группах из трех чисел заданные знаки так, что результат делится на 3, а в двух группах из двух чисел так, что результат делится на 2, получим, что результат выполнения всех операций будет делиться на $3\cdot 3\cdot 3\cdot 4 = 108$.
Ответ: а) например, $(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1+1) = 108$;
б) например, $(1+7+1)\cdot(7+1+7)\cdot(1+7+1)\cdot(7+1+7+1)$.

Упражнения

1. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1008 и
а) пять;
б) четыре;
в) три
из них образуют геометрическую прогрессию?
Ответ: а) нет; **б)** нет; **в)** да.

2. На доске написано число 8. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две – третье и т.д.).
а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?
б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел равняться 72?
в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 832?
Ответ: а) нет; **б)** да; **в)** 8 минут.

3. Перед каждым из чисел 5, 6, …, 10 и 12, 13, …, 16 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 30 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?
Ответ: 1 и 645.

4. Числа от 1 до 10 записаны в строчку в некотором порядке. Всегда ли можно вычеркнуть несколько чисел так, чтобы осталось:
а) три числа в порядке возрастания или в порядке убывания?
б) пять чисел в порядке возрастания или в порядке убывания?
в) четыре числа в порядке возрастания или в порядке убывания?
Ответ: а) да; **б)** нет; **в)** да.

5. Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 8, либо в 5 раз. Сумма всех членов последовательности равна 141.
а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?
б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?
Ответ: а) 3; **б)** 45.

6. На листе бумаги написаны в строчку 14 единиц.
а) Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.
б) Докажите, что если единицы, стоящие на четных местах, заменить четверками, все равно между числами полученного набора можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.
в) Докажите, что между любыми 14 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.
Ответ: а) например, $(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1)=162$;

б) например, $(1+4+1)\cdot(4+1+4)\cdot(1+4+1)\cdot(4+1+4)\cdot(1+4)$.